



TITLE:

5次元多様体における三角形分割可能性のホモトピー不変性の問題 (PL多様体及び位相多様体)

AUTHOR(S):

松本, 幸夫

CITATION:

松本, 幸夫. 5次元多様体における三角形分割可能性のホモトピー不変性の問題 (PL多様体及び位相多様体). 数理解析研究所講究録 1971, 127: 96-106

ISSUE DATE:

1971-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106532>

RIGHT:

5次元多様体における三角形分割可能性のホモトピー不変性の問題

東大理 松本 幸夫

§1. 序

一乗[3]は6次元以上の位相多様体の三角形分割可能性がホモトピー不変でないことを示す多くの例を作る方法を与えた。しかし彼の方法は5次元においては使えない。その主な理由は次の定理(Sullivan-Kirby-Siebenmann)[4]が5次元ではなりたたないことによる。

定理 S-K-S : Q^m を non-compact, $m \geq 6$, $\pi_1(Q) = 0$ かつ $H^4(Q; \mathbb{Z})$ が 2-torsion をとらない多様体とせよ。 Q^m 上の任意の2つの PL-structures Θ, Σ に対して proper homotopy $h_t: Q \rightarrow Q$ が存在して $h_0 = id$ かつ $h_1: \Sigma \rightarrow \Theta$ PL-homeo となる。

この定理 S-K-S が5次元で成立しない反例として $Q^5 = S^3 \times R^2$ がある。すなわち $H^3(S^3 \times R^2; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ で分類される2つの PL-structures は互いに PL-homeo でない。(福原[1]を見よ。) また福原[1]は $Q^5 = S^1 \times S^3 \times R$ 上の2つの PL-structures も互いに PL-homeo ではない。

ないことを示した。この例では $\pi_1(Q^5) \neq 0$ ゆえ、直接に定理 S-K-S の反例とはいえないが、実はこの $S^1 \times S^3 \times R$ に対して定理 S-K-S が成立しないことが直接に一乗の方法を fail させるのである。このような 5 次元の特殊事情により、5 次元においては三角形分割可能性がホモトピー不変ではなかるうか？という予想が生まれる。それを支持するいくつかの例をあげよう。

例 1. (福原[1]) $S^1 \times S^4$ にホモトピー同値な多様体は三角形分割可能である。

例 2 (Siebenmann[1]) X^4 を $\omega_1(X^4) = \omega_2(X^4) = 0$, $\text{index}(X^4) = 8$ をみたすホモロジー多様体とする。 $X^4 \times S^1$ とホモトピー同値な 5 次元位相多様体 M_0^5 が存在する。明らかに M_0^5 と同じホモトピー型をもつ多様体は三角形分割できない。(古典的 Rohlin の定理)

例 3 (自明) 単連結 5 次元多様体及びホモトピーレンズ空間で $\pi_1 = \text{odd cyclic}$ なものは全て三角形分割可能。これは $H^4(M; \mathbb{Z}_2) \cong H_1(M; \mathbb{Z}_2) = 0$ より明らか。

例 4 (Hsiang-Wall [2]) ホモトピー T^5 (証明にギャップがあるが §4 で再証明する。 §4 注意 1.)

しかし実は π_1 に 2-torsion があると反例がある。

例 5 (Siebenmann) 5 次元ホモトピー実射影空間で三角形分

割できないものがある。(森田[5]を見よ。)

さて基本群は例1. $\pi_1 = \mathbb{Z}$, 例2. $\pi_1 = \mathbb{Z}$, 例3. $\pi_1 = 0$ or odd, 例4. $\pi_1 = \text{free abelian}$, 例5. $\pi_1 = \mathbb{Z}_2$. このような考案から, $\pi_1 = \text{abelian without 2-torsion}$ であるような5次元多様体の三角形分割可能性はホモトピー不変であるという予想が成立すると思われる。はじめ例4にあげた Hsiang-Wall の主張を使ってこの予想を証明したが、彼等の主張(証明なし)につけた証明のギャップを服部先生から指摘され、あとでこの主張が誤まりらしいことに気づいた (§2)。しかし我々の予想は付帯条件 $H^2(M; \mathbb{Z}_2) = 0$ をつけることによって証明される (§3)。

§2. ホモトピー議論

自然な写像 $p: BSpinTop \rightarrow BStoP$ かつ $H^4(BStoP; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \times^2 \mathbb{Z} = H^4(BSpinTop; \mathbb{Z})$ を導くことが知られている。前の \mathbb{Z} の generator は 1-st Pontrjagin class p_1 で、あとの \mathbb{Z} の generator は q_1 とかけれる。 $H^4(BStoP; \mathbb{Z}_2)$ の中には Kirby-Siebenmann class k がある。Kirby-Siebenmann により5次元以上の(かんたんのため oriented) 多様体 M^m について, $\tau: M^m \rightarrow BStoP$ を接バンドルの classifying map とするとき, $M^m: \text{triangulable} \Leftrightarrow \tau^* k = 0$ が知られている。 $\tau^* k$ を k_M と書こう。さて $p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{24}$ を projection, $i: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_{24}$ を 12 への inclusion とし, p_*, i_* でそれぞれの係数を持った cohomology

群の間に導かれた準同型を表わす。自然な写像 $\nu: F/\text{top} \rightarrow B\text{SpinTop}$ は一意的に $F/\text{top} \xrightarrow{\tilde{\nu}} B\text{SpinTop}$ に lift する。次の定理がこの $\tilde{\nu}$ の目標である。

定理 1. $p_* \tilde{\nu}^* q_1 + i_* \nu^* k = i_* k_2^2 \in H^4(F/\text{top}; \mathbb{Z}_{24})$. ただし $k_2 \in H^2(F/\text{top}; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ は generator.

位相空間 X に対して $X\langle n \rangle$ で X の $(n-1)$ -conn. fibration を表わす。i.e. $w: X\langle n \rangle \rightarrow X$ は fibre map で、 $\pi_i(X\langle n \rangle) = 0$ for $i < n$,
 $\tilde{w}_*: \pi_i(X\langle n \rangle) \xrightarrow{\sim} \pi_i(X)$ $i \geq n$. 例として $B\text{SpinTop}\langle 4 \rangle = B\text{SpinTop}$
 定理の左辺は合成 $\varphi: F/\text{top} \xrightarrow{\tilde{\nu}} B\text{SpinTop}\langle 4 \rangle \rightarrow B\text{SpinTop}$ が $F/\text{top} \rightarrow B\text{SpinTop}\langle 5 \rangle$ に lift できるかどうかの obstruction になっている。はじめに、この合成 φ が $B\text{SpinTop}\langle 5 \rangle$ に lift してないことを示す。すなわち次の補題である。

補題 1 $p_* \tilde{\nu}^* q_1 + i_* \nu^* k \neq 0$

証明: もしも合成 $\varphi: F/\text{top} \rightarrow B\text{SpinTop}\langle 4 \rangle \rightarrow B\text{SpinTop}\langle 5 \rangle$ に lift したとすれば φ は $F/\text{top} \xrightarrow{\tilde{\nu}} B\text{SpinTop}\langle 5 \rangle \rightarrow B\text{SpinTop}\langle 4 \rangle$ と分解するが、 $B\text{SpinTop}\langle 5 \rangle$ は 4-connected ゆえ、任意の 4次元複体 X^4 と任意の map $f: X^4 \rightarrow F/\text{top}$ に対して合成 $X^4 \xrightarrow{f} F/\text{top} \xrightarrow{\tilde{\nu}} B\text{SpinTop}\langle 4 \rangle$ は null-homotopic のはず。ところが次の[例]はこのことが正しくないことを示している。ゆえに $p_* \tilde{\nu}^* q_1 + i_* \nu^* k \neq 0$.

[例] map $h: \mathbb{C}P_2 \rightarrow F/\text{top}$ を次のように作る。 $g: S^2 \rightarrow F/\text{top}$

を $\pi_2(F/\text{top}) = \mathbb{Z}_2$ の generator とし, $S^3 \xrightarrow{H} S^2$ を Hopf-fibration とする. $\pi_3(F/\text{top}) = 0$ かつ合成 $S^3 \xrightarrow{H} S^2 \xrightarrow{g} F/\text{top}$ は null-homotope. よってある map $\mathbb{C}P_2 \rightarrow F/\text{top}$ に g が引き張られる. この map を $h: \mathbb{C}P_2 \rightarrow F/\text{top}$ とするのである. すると合成 $\mathbb{C}P_2 \xrightarrow{h} F/\text{top} \xrightarrow{\tilde{\nu}} B\text{Stop}\langle 4 \rangle \rightarrow B\text{SF}\langle 4 \rangle$ は null-homotopic である (Toda [1]).

証明: fibration: $\text{spin}F \rightarrow F/\text{top} \xrightarrow{\tilde{\nu}} B\text{Stop}\langle 4 \rangle$ を考える. $\pi_2(\text{spin}F) \cong \pi_2(F/\text{top})$ かつ $g: S^2 \rightarrow F/\text{top}$ は $g^*: S^2 \xrightarrow{\bar{g}} \text{spin}F \rightarrow F/\text{top}$ と考えられる. 合成 $S^3 \xrightarrow{H} S^2 \xrightarrow{\bar{g}} \text{spin}F$ は n を充分大としたときの合成 $S^{n+3} \xrightarrow{S^n H} S^{n+2} \xrightarrow{\bar{g}} S^n$ なる map の adjoint である. $S^n H$ は球面の 1-次元 stable homotopy 群 π_1 の generator η であり, \bar{g} は stable 2-stem $\pi_2 \cong \mathbb{Z}_2$ の generator η^2 である. 合成 $\bar{g} \circ S^n H$ は $\eta^3 \in \pi_3$ であり $\pi_3 \cong \mathbb{Z}_{24}$ の 12 に等しい. (cf. Toda [6].) とくに合成 $g^* \circ H: S^3 \rightarrow \text{spin}F$ は 0 である. これの表わす元を $x \in \pi_3(\text{spin}F)$ と記す. $B\text{Stop}\langle 4 \rangle$ は 3-connected かつ合成 $\mathbb{C}P_2 \xrightarrow{h} F/\text{top} \xrightarrow{\tilde{\nu}} B\text{Stop}\langle 4 \rangle$ は $\pi_4(B\text{Stop}\langle 4 \rangle)$ の元 y を与える. exact seq: $\pi_4(F/\text{top}) \xrightarrow{\tilde{\nu}_*} \pi_4(B\text{Stop}\langle 4 \rangle) \xrightarrow{\partial} \pi_3(\text{spin}F)$ において, $\partial y = x \neq 0$ が成立つから y は $\text{Image } \tilde{\nu}_*$ に入っていない. 図式:

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_4(B\text{Stop}\langle 4 \rangle) & \rightarrow & \pi_4(B\text{SF}\langle 4 \rangle) \\ & \tilde{\nu} \nearrow & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \pi_4(F/\text{top}) & \xrightarrow{\nu} & \pi_4(B\text{Stop}) & \rightarrow & \pi_4(B\text{SF}) \quad (\text{完全}) \end{array}$$

により, y を $\pi_4(B\text{Stop})$ の元とみなすと, y は $\text{Im } \nu$ に入らない. かつ $\pi_4(B\text{SF})$ に移っても 0 である. ~~したがって~~ 合成 $\mathbb{C}P_2 \xrightarrow{h}$

$F/\text{top} \xrightarrow{\tilde{\nu}} B\text{Top}\langle 4 \rangle \rightarrow B\text{SF}\langle 4 \rangle$ の決める $\pi_4(B\text{SF}\langle 4 \rangle)$ の元は 0 とな

11. ようしてこの合成は null-homotopic ではない。[例] の証

明及び補題 1 の証明終り。 $\gamma = p_* \tilde{\nu}^* q_1 + i_* \nu^* k$ とおく。

補題 2: γ は $\text{Ker}(H^4(F/\text{top}; \mathbb{Z}_{24}) \rightarrow H^4(F/\text{top}\langle 4 \rangle; \mathbb{Z}_{24}))$ に入る。

証明: 合成 $F/\text{top}\langle 4 \rangle \rightarrow F/\text{top} \rightarrow B\text{SF}\langle 4 \rangle$ が $B\text{SF}\langle 5 \rangle$ に lift することを示せばよい。 $H^4(F/\text{top}\langle 4 \rangle; \pi_4(B\text{SF}\langle 4 \rangle)) = \text{Hom}(\pi_4(F/\text{top}\langle 4 \rangle), \pi_4(B\text{SF}\langle 4 \rangle))$. 上の合成は $\pi_4(F/\text{top}\langle 4 \rangle) \rightarrow \pi_4(B\text{SF}\langle 4 \rangle)$ の準同型として 0 中へ、lift の obstruction は 0 である。証明終。

ところで $\text{Ker}(H^4(F/\text{top}; \mathbb{Z}_{24}) \rightarrow H^4(F/\text{top}\langle 4 \rangle; \mathbb{Z}_{24})) \cong \mathbb{Z}_2$ であり、 $i_* k_2^2$ で生成される。このことは fibration $F/\text{top}\langle 4 \rangle (= F/\text{top}\langle 3 \rangle) \rightarrow F/\text{top} \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, 2)$ に associate した Serre の exact seq を調べればわかる。これで定理 1 が果せた。

注意: Hsiang-Wall [2] は Complex X 上の Top-bundle で fibre-homotopy trivial なものに対しては $p_* q_1(\xi) + i_* k(\xi) = 0 \in H^4(X; \mathbb{Z}_{24})$ を証明なしに主張している。彼等の主張がもし“任意の F/top-bundle に対して $p_* q_1(\xi) + i_* k(\xi) = 0$ ”を主張しているなら定理 1 より誤りであるが、また“fibre-homotopy trivial な Top-bundle に適当な F/top-bundle の structure を与えれば $p_* q_1(\xi) + i_* k(\xi) = 0$ ”という意味にとると、補題 1 の後に与えた [例] はこの主張の反例となっている。その証明: 写像

$g: \mathbb{CP}_2 \rightarrow \text{BSTOP}$ が $\mathbb{CP}_2 \xrightarrow{\tilde{g}} F/\text{top} \xrightarrow{\nu} \text{BSTOP}$ と分解すると仮定すると、 g の lift \tilde{g} をひとつとめると、合成 $\mathbb{CP}_2 \xrightarrow{\tilde{g}} F/\text{top} \xrightarrow{\nu} \text{BSTOP}$ は $\pi_4(\text{BSTOP})$ の元を定める。これを $[\tilde{g}]$ と書く。この $[\tilde{g}] \in \pi_4(\text{BSTOP})$ は g のみで定まり g の lift \tilde{g} によらない。何故なら、 \tilde{g}_1, \tilde{g}_2 を g の2つの lifts とし、 $p: \text{BSTOP} \rightarrow \text{BSTOP}$ を projection とする。 $g \simeq p \circ \tilde{g}_i$ ($i=1,2$) ゆえ、写像 $F: \mathbb{CP}_2 \times I \rightarrow \text{BSTOP}$ があ、 $F_i \equiv F|_{\mathbb{CP}_2 \times i} = p \circ \tilde{g}_i$ ($i=1,2$)、 $F_i(S^2 \times i) = *$ としてよい。これより $F|_{S^2 \times I}$ は $S^2 \times I \rightarrow S^3 \rightarrow \text{BSTOP}$ と分解するが $\pi_3(\text{BSTOP}) = 0$ ゆえ $F(S^2 \times I) = *$ と仮定してよく、 F は $\mathbb{CP}_2 \times I \rightarrow S^4 \times I \xrightarrow{\tilde{F}} \text{BSTOP}$ と分解し、 \tilde{F} は S^4 からの写像としての $p \circ \tilde{g}_1$ と $p \circ \tilde{g}_2$ の homotopy を与える。ゆえ $p_*[\tilde{g}_1] = p_*[\tilde{g}_2] \in \pi_4(\text{BSTOP})$ 。と $p_*: \pi_4(\text{BSTOP}) \simeq \pi_4(\text{BSTOP}) \therefore [\tilde{g}_1] = [\tilde{g}_2]$ 。

いま g として $\nu \circ h: \mathbb{CP}_2 \rightarrow \text{BSTOP}$ をとる。 h は [例] で与えたもの。 $\nu \circ h$ の任意の lift $\mathbb{CP}_2 \xrightarrow{\psi} F/\text{top}$ について $[\psi] = [\tilde{\nu} \circ h] \in \pi_4(\text{BSTOP})$ は、いま示した。よって [例] で証明されているように $[\psi]$ は $\pi_4(\text{BSTOP}) \rightarrow \pi_4(\text{BSF})$ で 0 にうつらない。すなわち lift $\psi: \mathbb{CP}_2 \rightarrow F/\text{top}$ of $\nu \circ h$ によらず $p_*g_1(z) + i_*h(z) \neq 0$ が示せた。(h は h で分類される \mathbb{CP}_2 上の F/top -idls)

§3. ある種の不変性.

この § で次の定理を示す。

定理 2 : M^5 を 5 次元閉多様体. $\pi_1(M^5)$ は abelian で 2-torsion がない. $H^2(M^5; \mathbb{Z}_2) = 0$ とする. γ のとき任意のホモトピー-equivalence $f: M^5 \rightarrow L^5$ について $f^*k_L^5 = k_{M^5}$ が成立つ.

証明 : τ_L, τ_M を tangent bundle とせよ. $\tau_M - f^*\tau_L$ は M 上の F/top -bundle である. γ の classifying map $g: M \rightarrow F/\text{top}$ をとる. $\tilde{M} \xrightarrow{\omega} M$ を odd-covering, $\pi_1(\tilde{M}) = \text{free}$ とする. $\xi = \tau_M - f^*\tau_L$ とおく. 定理 1 により $\omega^*(p_*g_1(\xi) + i_*k(\xi)) = \omega^*i_*k_2^2(\xi)$. $H^2(M^5; \mathbb{Z}_2) = 0$ としたから $k_2(\xi) = 0$ ゆえ右辺は 0. ゆえに $(*) \quad \omega^*(p_*g_1(\xi) + i_*k(\xi)) = 0$.

$\tilde{f}: \tilde{M} \rightarrow \tilde{L}$ を f を cover するホモトピー-equivalence とする. $g \circ \omega: \tilde{M} \rightarrow F/\text{top}$ は $\tau_{\tilde{M}} - \tilde{f}^*\tau_{\tilde{L}}$ の classifying map である.

また $2g_1(\omega^*\xi) = 2g_1(\tau_{\tilde{M}} - \tilde{f}^*\tau_{\tilde{L}}) = p_1(\tau_{\tilde{M}} - \tilde{f}^*\tau_{\tilde{L}}) = p_1(\tilde{M}) - f^*p_1(\tilde{L})$. Novikov により free abelian fundamental group をもつ 5 次元多様体の p_1 はホモトピー-不変であることが示されている. この証明は PL-splitting lemma を使うが, それは高次元では Top-category に拡張されるから, \mathbb{CP}_{2n} を掛けて高次元 \wedge の reduction を行えば Top category での p_1 のホモトピー-不変性 (5 次元での) が示される. (一般には $4k+1$ -manifold の L_{4k} -genus). こうして $p_1(\tilde{M}) - f^*p_1(\tilde{L}) = 0$. 更に仮定より $H^*(\tilde{M}; \mathbb{Z})$ は two-torsion を含まないから, $2g_1(\omega^*\xi) =$

$= 0$ から $q_1(\omega^*\xi) = 0$ が従う。上の式(*) に代入して

$$(**) \quad \omega^* i_* k(\xi) = 0$$

を得る。

補題 3 : $\tilde{M}^n \xrightarrow{\omega} M$ が閉多様体の間の odd-covering なら $\omega^*: H^i(M^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^i(\tilde{M}^n; \mathbb{Z}_2)$ は $\forall i$ について injective である。

証明 : ω は odd-covering ゆえ \mathbb{Z}_2 -係数では ω は degree 1.

$$\begin{array}{ccc} \text{よって図式} : & H^i(M^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\omega^*} H^i(\tilde{M}^n; \mathbb{Z}_2) \quad \text{の可換性か} \\ & \cong \downarrow \cap [M^n] & \cong \downarrow \cap [\tilde{M}^n] \\ & H_{n-i}(M^n; \mathbb{Z}_2) & \xleftarrow{\omega_*} H_{n-i}(\tilde{M}^n; \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

ら、 ω^* の injectivity が従う。補題 3 の証明終り。

補題 3 と上の(**) から $i_* k(\xi) = 0$, また i_* も injective ゆえ $k(\xi) = 0$. $k(\xi) = k(\tau_M - f^* \tau_L) = k_M - f^* k_L$ ゆえ定理 2 が証明された。

§ 4 補足

我々の定理 2 は次のような少し精密な形に書くこともできる :

定理 2' : M^5 を 5 次元閉多様体. $\pi_1(M^5)$ は abelian \mathbb{Z} -2-torsion がない. $S_q^2: H^2(M^5; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^4(M^5; \mathbb{Z}_2)$ が 0-map. γ のとき任意のホモトピー同値 $f: M^5 \rightarrow L^5$ について $f^* k_L = k_M$ が成立つ。

定理 2 の証明をふりかえりてみれば、要するに $k_2^2(\xi) \in H^4(M^5; \mathbb{Z}_2)$ を 0 にすることが問題であった。明らかに $k_2^2(\xi) = S_q^2(k_2)$

があるから、 $S_g^2 = 0$ の仮定により $k_2^2(\xi) = 0$ となる。これで定理 2' が示された。

注意 1: 前にも述べたように " $p_*q_1 + i_*k$ がホモトピー不変性をもつ" という Hsiang-Wall の主張は一般には正しくない。しかし $S_g^2: H^2(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^4(M; \mathbb{Z}_2)$ が 0-map であるような任意の複体 M については $p_*q_1 + i_*k$ がホモトピー不変となる。しかも n -torus T^n はこの性質をもっている。従って彼等のホモトピートラスに関する主張は正しいことになる。

注意 2: このシンポジウムで松本寛生氏が S_g^2 の条件のかわりに 2nd Stiefel-Whitney class $w_2 = 0$ を仮定して 5次元閉多様体の三角形分割の不変性を発表した。最近彼の結果が定理 2' を用いても証明できることがわかった。それには次の補題に注目すればよいであろう。

補題 4: 5次元閉多様体 M^5 において $H^4(M; \mathbb{Z}) (\cong H_1(M; \mathbb{Z}))$ に 2-torsion が無い、かつ $w_2 = 0$ とすると $S_g^2: H^2(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^4(M; \mathbb{Z}_2)$ は 0-map である。(M : 向きづけ可能とする。定理 2, 2' でもこれを仮定している。)

注意: 補題 4 は 4次元閉多様体については trivial である。

補題 4 の証明: 第 1 段: $H_1(M^5; \mathbb{Z})$ に 2-torsion がなければ $S_g^1: H^1(M^5; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^2(M^5; \mathbb{Z}_2)$ は 0-map である。

($\because H_1(M^5; \mathbb{Z})$ に 2-torsion が無いので、 $H^1(M^5; \mathbb{Z}_4) \rightarrow H^1(M^5; \mathbb{Z}_2)$

は onto. 従って $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ に associate した Bockstein
homo $\beta = S_f^1: H^1(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^2(M; \mathbb{Z}_2)$ は 0-map である. (\therefore)

才 2 段: $H_1(M; \mathbb{Z})$ に 2-torsion がなければ, $\forall \alpha \in H^2(M; \mathbb{Z}_2)$ と $\forall \gamma \in H^1(M; \mathbb{Z}_2)$ について次の式がなりたつ:

$$S_f^2(\alpha \cup \beta) = S_f^2 \alpha \cup \gamma$$

(\therefore) Cartan formula と 才 1 段 のことから明らか (\therefore)

補題 4 の証明は次のようにして終る: u_i を i 番目の Wu
class とすると $w_2 = u_2 + S_f^1 u_1 + S_f^2 u_0 = u_2$ (才 1 段). Wu's
formula から $S_f^2 x = x \cup u_2$ for $\forall x \in H^3(M; \mathbb{Z}_2)$ かつ w_2
= 0 を仮定すれば $S_f^2: H^3(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^5(M; \mathbb{Z}_2)$ は 0-map.
かつ (才 2 段) により $S_f^2 \alpha \cup \gamma = 0$ ($\forall \alpha \in H^2(M; \mathbb{Z}_2), \forall \gamma \in H^1(M; \mathbb{Z}_2)$).
これから $\forall \gamma \in H^1$ についてなりたつということから
Poincaré duality を使って $S_f^2 \alpha = 0 \quad \forall \alpha \in H^2(M; \mathbb{Z}_2)$ となる.

証明終.

References

- [1] S. Fukuhara: On the Hauptvermutung of 5-dimensional manifolds and
S-cobordisms. (to appear) 341-342
- [2] Hsiang-Wall: On ~~the~~ homotopy tori. II. (Bull. London Math. 1. 1969.)
- [3] S. Ichiraku: On Realization of Kirby-Siebenmann's Obstructions by 6-manifolds
- [4] Kirby-Siebenmann: Some theorems on topological manifolds.
- [5] S. Morita: このシンポジウム予稿集
- [6] H. Toda: Composition methods in homotopy groups of spheres.